

# Méthodes numériques pour l'approximation des lois de conservation hyperboliques

## **TP1: Rupture d'un barrage**

Bonneel Nicolas et Durand Elise

6 avril 2006

# 1 Présentation du problème

## Problème posé

On étudie l'évolution du système suivant :

De chaque côté du barrage (situé en  $x = \frac{1}{2}$ ) le niveau de l'eau est différent. Pour  $x < \frac{1}{2}$  le niveau est égal à  $h_g$ , pour  $x > \frac{1}{2}$  il est égal à  $h_d$ . A l'instant  $t = 0$ , on enlève le barrage, la vitesse initiale de l'eau étant nulle dans tout le domaine  $\Omega = [0, 1]$ . Le but de ce TP est de suivre l'évolution de la hauteur d'eau  $h$  ainsi que du débit  $hu$  (avec  $u(x, t)$  la vitesse de l'eau) en tout point du domaine au cours du temps.

$$U : (x, t) \mapsto \begin{cases} h(x, t) \\ hu(x, t) \end{cases}$$

## Mise en équation

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement nous amènent à résoudre le problème de Riemann appliqué aux équations de St Venant :

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{gh^2}{2})_x = 0 \end{cases} \quad \forall x \in [0, 1], \forall t > 0$$

avec une discontinuité de la condition initiale :

$$\forall x \in [0, 1], U(x, 0) = \begin{cases} (h_g, 0) & x < \frac{1}{2} \\ (h_d, 0) & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

On le met sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

avec :

$$F : U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}$$

# 2 Résolution numérique

## Schéma utilisé

Nous avons à résoudre un problème hyperbolique non linéaire. L'application d'un schéma aux différences finies et explicite en temps classique n'est pas envisageable dans

notre cas car l'onde peut se propager dans les 2 sens (changement de direction au niveau de la paroi). C'est pourquoi nous avons utilisé une généralisation du schéma décentré appelé schéma de Godunov :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G(U_j^n, U_{j+1}^n) - G(U_{j-1}^n, U_j^n))$$

La discrétisation en espace et en temps se fait de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_j = (j - 1/2)\Delta x \\ U_j^n = U(x_j, n\Delta t) \\ x_0 = 0 \\ x_{N+1} = 1 \end{cases}$$

### Conditions aux limites

On introduit 2 variables "virtuelles" aux extrémités pour valider le schéma sur les bords :  $U_{-1}$  et  $U_{N+2}$ . On modélise les parois par les conditions suivantes :

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_{-1} = \begin{bmatrix} h \\ -hu \end{bmatrix}_0$$

et

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_{N+2} = \begin{bmatrix} h \\ -hu \end{bmatrix}_{N+1}$$

On garde la même hauteur de fluide et le débit est de signe opposé de chaque côté de la paroi se qui traduit bien que le fluide est réfléchi et la vitesse est nulle sur la paroi.

### Condition CFL

Pour assurer la stabilité du schéma, la condition CFL doit être satisfaite :

$$\mathbf{c} \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

avec  $\mathbf{c} = \max(|u| + c)$  (on majore la vitesse de propagation car elle n'est pas constante).

On calcule le pas de temps à chaque itération afin de vérifier la CFL à chaque instant.

## 3 Résultats

Lorsque l'on observe la hauteur du fluide au cours du temps dans les premiers instants, on remarque la formation d'un plateau intermédiaire entre les 2 niveaux initiaux. A gauche

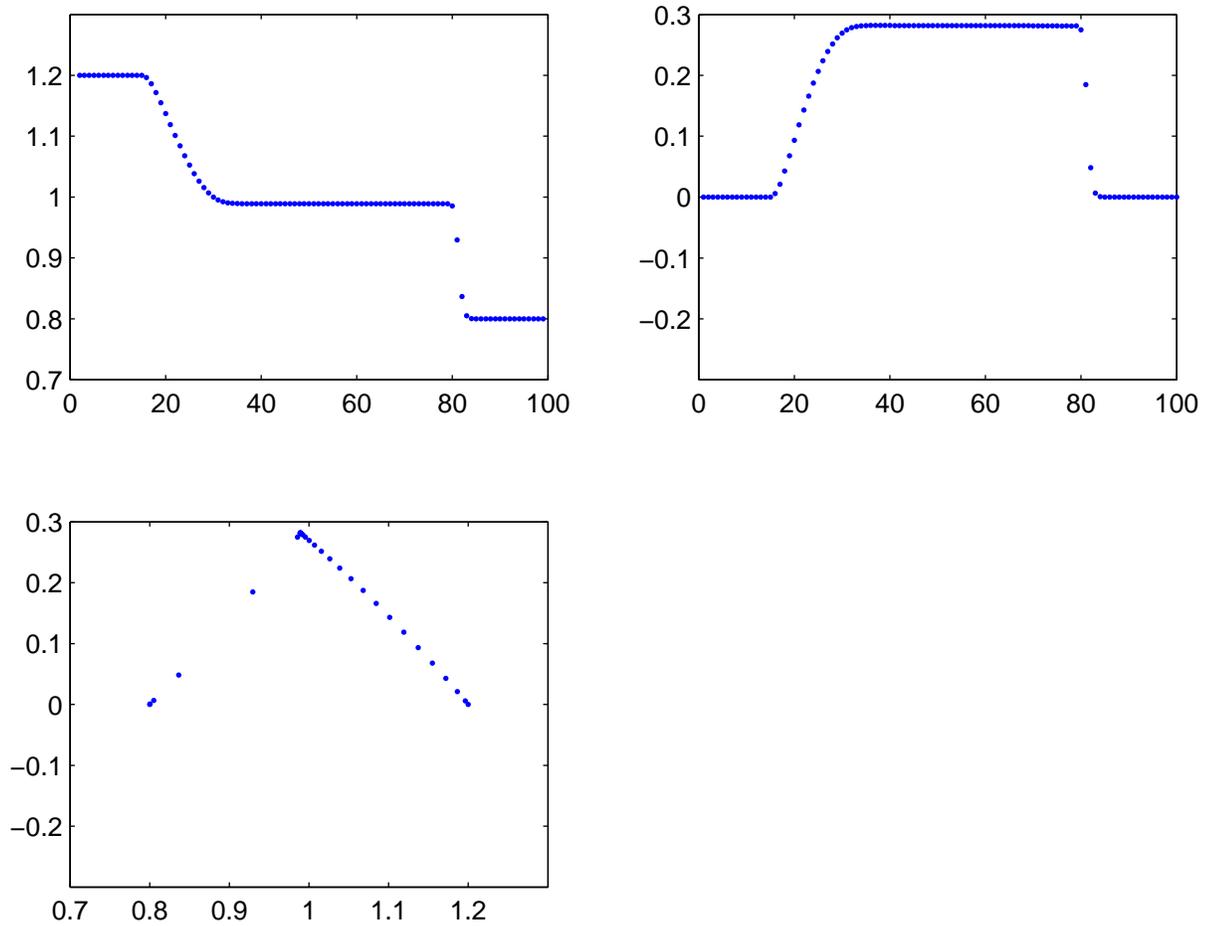


FIG. 1 – Résultats : hauteur d'eau en fonction de x, débit en fonction de x et hauteur en fonction du débit

de ce plateau on observe une courbe continue, c'est la détente et à droite on observe une discontinuité, c'est le choc. On trace les diagrammes représentant le débit en fonction de la hauteur d'eau : La courbe correspondant au choc contient beaucoup moins de points que la courbe correspondant à la détente car la variation de hauteur se fait brutalement pour le choc alors qu'elle est continue pour la détente. Plus on se rapproche de la CFL plus ce phénomène prend de l'importance.

Lorsque le choc atteint le bord, les courbes de choc et de détente sont presque confondues...

## 4 Programme

```
g = 2.;%intensite de la pesanteur
Nx = 100;
dx = 1./Nx;
dt = dx/sqrt(g*1.2);
Nt = 4000;
V = zeros(Nx, 2);
Hg = 1.2;
Hd = 0.8;

U(1:(Nx/2), 1) = Hg;
U(1:(Nx/2), 2) = 0;

U((Nx/2+1):Nx, 1) = Hd;
U((Nx/2+1):Nx, 2) = 0;

for n = 1:Nt
    U(1, 1) = U(2, 1);
    U(Nx, 1) = U(Nx-1, 1);

    U(1, 2) = -U(2, 2);
    U(Nx, 2) = -U(Nx-1, 2);
    for j = 2:(Nx-1)
        res = (GDS(g,U(j,1), U(j,2), U(j+1,1), U(j+1,2))- GDS(g,U(j-1,1), U(j-1,2), U(j,1), U(j,2)));
        V(j,1) = U(j,1)-dt/dx*(res(1));
        V(j,2) = U(j,2)-dt/dx*(res(2));
    end;
    U(:, :) = V(:, :);

    subplot(2,2,1);
    plot(U(:, 1), '.');
    axis([0 Nx 0.7 1.3]);

    subplot(2,2,2);
    plot(U(:, 2), '.');
    axis([0 Nx -0.3 0.3]);

    subplot(2,2,3);
    plot(U(:, 1), U(:,2), '.');
    axis([0.7 1.3 -0.3 0.3]);

    pause(0.2);
```

```
dt =dx/max(abs(U(:,2))./(U(:,1)+0.00001)) + sqrt(g*U(:,1)) );  
end;
```