

# Courbes splines

Ezeckiel Ferradin & Nicolas Bonneel

Avril 2005

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes ouvertes</b>	<b>3</b>
1.1	Influence du type de vecteur nodal . . . . .	3
1.2	Influence du vecteur nodal . . . . .	4
1.3	Modification d'un point du polygone de contrôle . . . . .	5
1.4	Suppression d'un point du polygone de contrôle . . . . .	6
1.4.1	Sans modifier le vecteur nodal . . . . .	7
1.5	Adjonction d'un point au polygone de contrôle . . . . .	8
1.5.1	Sans modifier le vecteur nodal . . . . .	8
1.5.2	Modification du vecteur nodal . . . . .	8
1.6	Points du polygone de contrôle alignés . . . . .	9
1.6.1	ordre : $m = 3$ . . . . .	9
1.6.2	ordre : $m = 4$ . . . . .	10
1.7	Multiplicité des points de contrôle . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Courbes fermées</b>	<b>13</b>
2.1	Représentation d'un vecteur nodal standard . . . . .	13
2.2	Représentation d'un vecteur nodal non standard . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

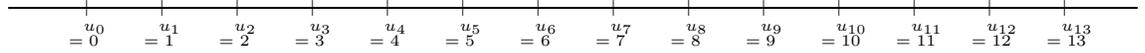
# 1 Courbes ouvertes

Dans toute la suite du document nous travaillerons sur une forme de 10 points de controle.

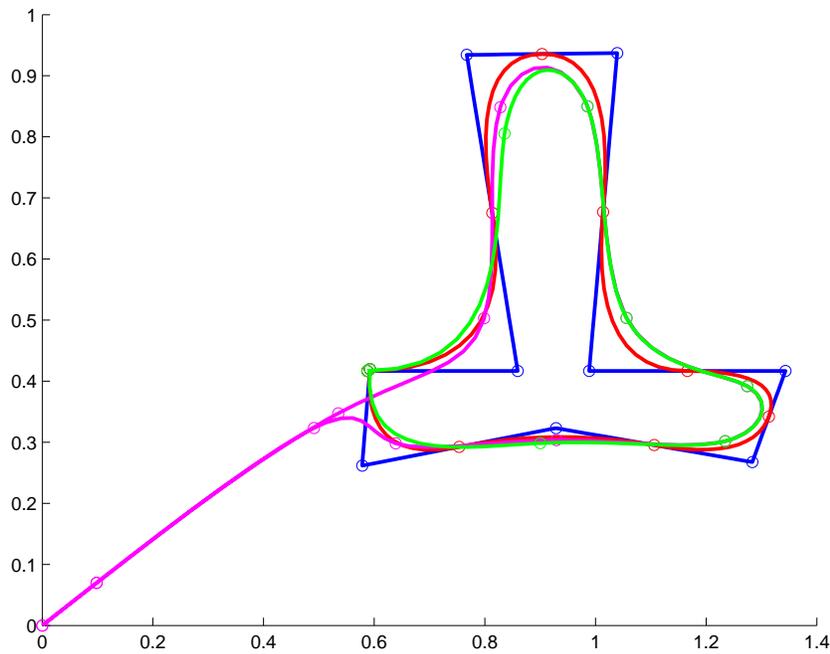
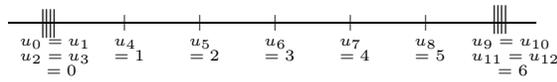
## 1.1 Influence du type de vecteur nodal

Nous utilisons les vecteurs nodaux :

– **Type I** : [0 :13]



– **Type II** : [0 0 0 0 :7 7 7 7]



Tout d'abord, on peut tracer le polygone de controle en traçant la spline d'ordre 2 (avec un vecteur nodal de type II).

On remarque que le 1er point de la courbe magenta représentant la spline issue du vecteur nodal de type I, ainsi que le dernier est 0. Au contraire,

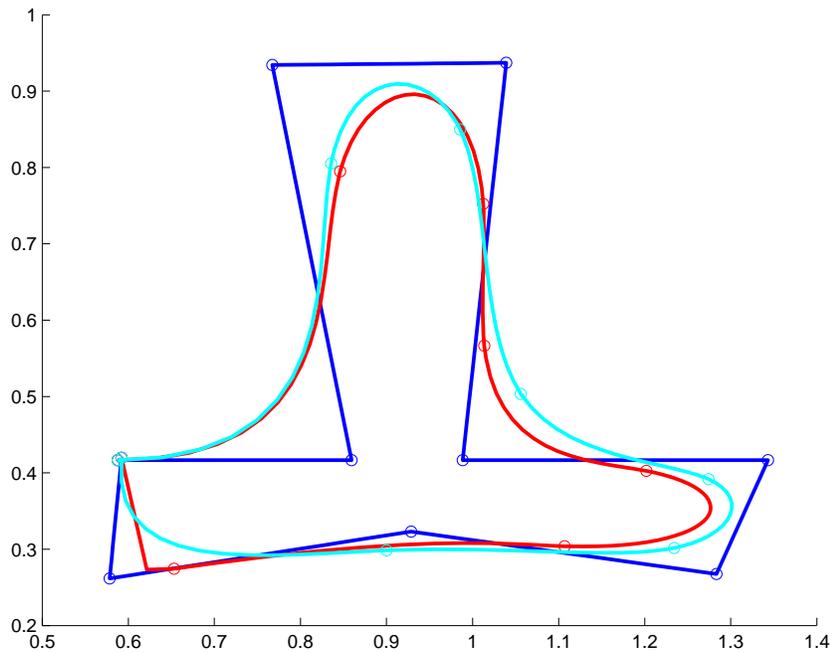
ceux de la courbe verte correspondant à un vecteur nodal de type II sont les points  $P_0$  et  $P_9$  du polygone de contrôle.

Cela est dû au fait que dans le cas du vecteur nodal de type I, les 4 premières splines sont nulles ( $m=4$ ), ainsi que les 4 dernières. Dans le cas du vecteur nodal de type II, les 4 premiers points nodaux étant répétés, les splines correspondantes donnent le point  $P_0$  et de même les 4 dernières donnent  $P_9$ . De plus, on voit que dans le vecteur nodal de type II, la courbe est tangente à son polygone de contrôle aux points  $P_0$  et  $P_9$ . Pour des raisons similaires, on peut remarquer que les courbes coïncident sur un certain intervalle. En effet, pour que celles-ci se confondent, il faut et il suffit que les splines correspondantes aient les mêmes fonctions de base pour les types I et II. Cela se produit à partir de  $u_{2m-2}$  jusque  $u_{n-m+2}$ . On en déduit que les courbes coïncident sur l'intervalle  $[u_4, u_7]$  lorsque  $m=4$ .

## 1.2 Influence du vecteur nodal

On peut remarquer que la spline correspondant à un vecteur nodal choisi avec des noeuds entiers a ses points nodaux répartis uniformément, donc faire un vecteur nodal standard correspond à faire un vecteur à noeuds équidistants : les courbes obtenues sont donc équivalentes.

En revanche, la courbe obtenue à partir des noeuds non équidistants est différente puisque construite sur des splines dont les supports sont différents de celles à vecteur nodal standard.



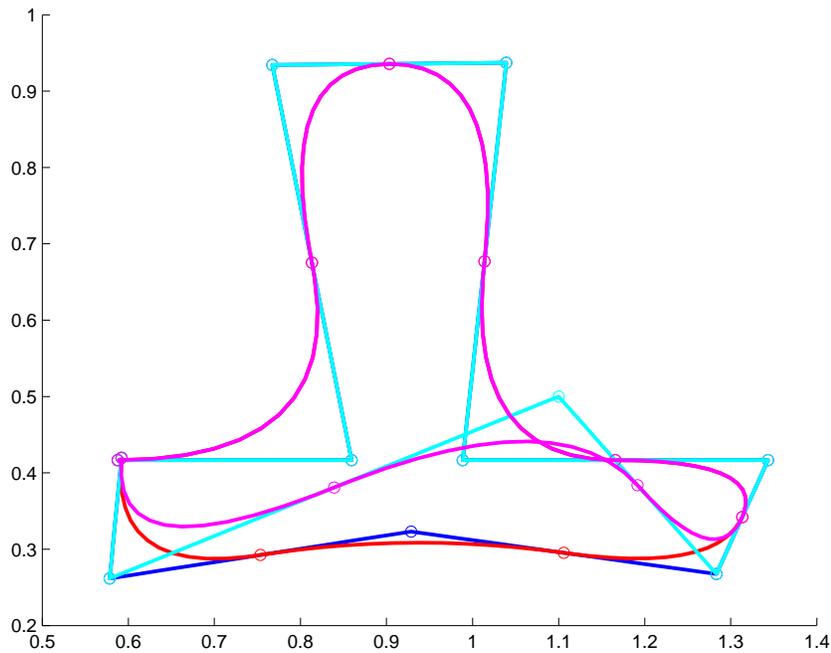
La courbe bleue représente le polygone de controle, la rouge la courbe issue des noeuds non équidistants de type II (vecteur  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.9 \ 3 \ 4.1 \ 4.5 \ 5.8 \ 7 \ 7 \ 7 \ 7]$ ), et la courbe cyan est issue du vecteur nodal standard de type II ( $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ :7 \ 7 \ 7 \ 7]$ ).

Ces deux dernières courbes sont donc sensiblement différentes.

### 1.3 Modification d'un point du polygone de contrôle

La fonction `mlvectious` permet de modifier un point de contrôle et de tracer la spline ainsi modifiée.

On travaille maintenant avec des vecteurs nodaux standards de type II aux noeuds équidistants ( $[0 \ 0 \ 0 \ :8 \ 8 \ 8]$  pour 10 points de controle et  $m=3$ ). On cherche dans cette partie à observer l'influence de la modification d'un point dans le polygone de controle.

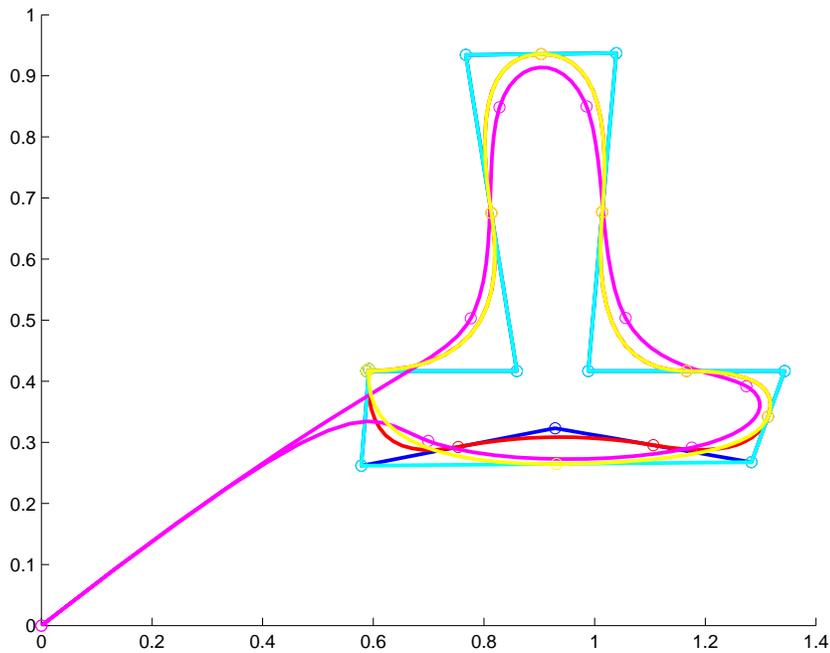


En cyan le nouveau polygone de controle modifié, en bleu l'ancien. En magenta la nouvelle courbe obtenue et en rouge l'ancienne.

On remarque que les splines ainsi observées ne sont pas totalement transformées par la modification. En effet, l'expression de  $P(u)$  ( $P(u) = \sum_i N_i^3(u) + P_i$ ) montre que c'est le coefficient de la fonction  $N_3^3$  qui est modifié et donc 3 arcs de courbe sont affectés puisque la fonction  $N_3^3$  est définie sur les 3 intervalles  $[u_2, u_3], [u_3, u_4], [u_4, u_5]$  (car les 3 premiers points nodaux sont confondus).

#### 1.4 Suppression d'un point du polygone de contrôle

Observons maintenant l'influence de la suppression d'un point de contrôle. La fonction `suppctious` permet de supprimer un point de contrôle et de calculer la spline correspondante. On choisit de supprimer le point numéro 3 (le point central en bas) :

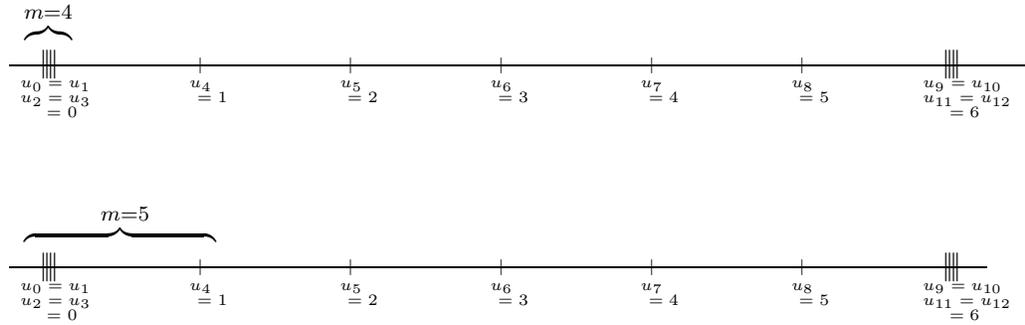


En cyan le nouveau polygone de controle modifié, en bleu l'ancien. En magenta (type I) et jaune (type II) les nouvelles courbes obtenues et en rouge (type II) l'ancienne.

#### 1.4.1 Sans modifier le vecteur nodal

En supprimant un point de controle, on peut remarquer que l'on modifie également le vecteur nodal. De plus, d'après la question 1, on en déduit (la spline ayant 0 comme point d'ancrage) que le vecteur nodal est maintenant de type I (courbe magenta). En effet, le fait de supprimer un point de contrôle entraîne que maintenant  $m=5$ . C'est pour cela que l'on modifie le vecteur nodal pour en refaire un type II (courbe jaune).

On remarque également que plus  $m$  augmente, plus la courbe s'éloigne de son polygone de contrôle.



## 1.5 Adjonction d'un point au polygone de contrôle

L'adjonction d'un point de contrôle peut se faire avec la fonction "add-vect".

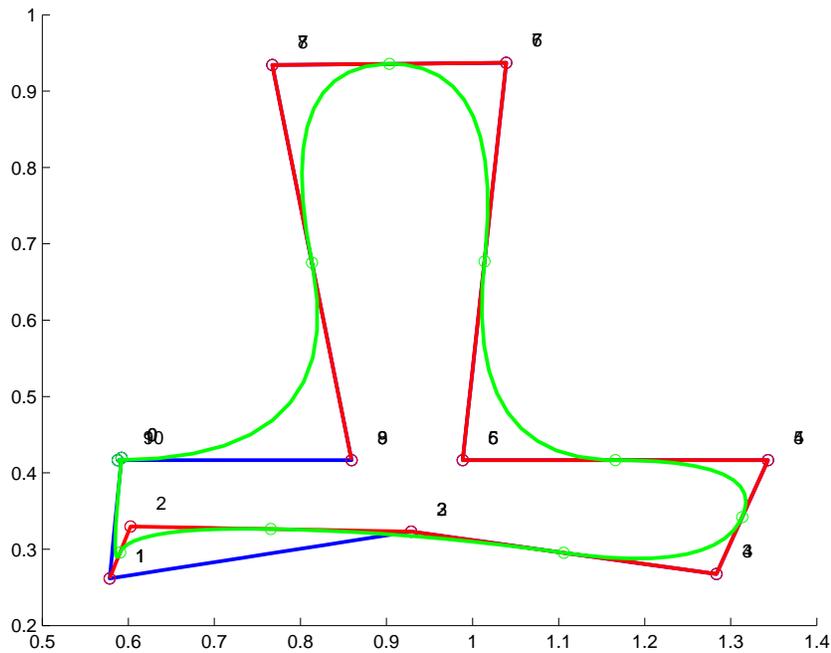
### 1.5.1 Sans modifier le vecteur nodal

On remarque que l'ajout d'un point de contrôle modifie les points de départ et d'arrivée de la spline. En effet, celle-ci part maintenant de  $P_1$  et se termine au point  $P_8$  du polygone de contrôle initiale.

De manière similaire que la question précédente, cela est dû au fait que maintenant l'ordre de la spline est de  $m=2$ . Ceci explique l'absence des points  $P_0$  et  $P_9$  car si  $m=2$ , les fonctions de base  $N_0^2(u) = 0$  et  $N_9^2(u) = 0$  sont nulles. On retombe partiellement sur le nouveau polygone de contrôle.

### 1.5.2 Modification du vecteur nodal

On modifie maintenant le vecteur nodal, celui devient :  $[0, 0, 0 : 9, 9, 9]$ .



En modifiant le vecteur nodal, on se ramène au cas déjà étudié d'une spline d'ordre 3.

## 1.6 Points du polygone de contrôle alignés

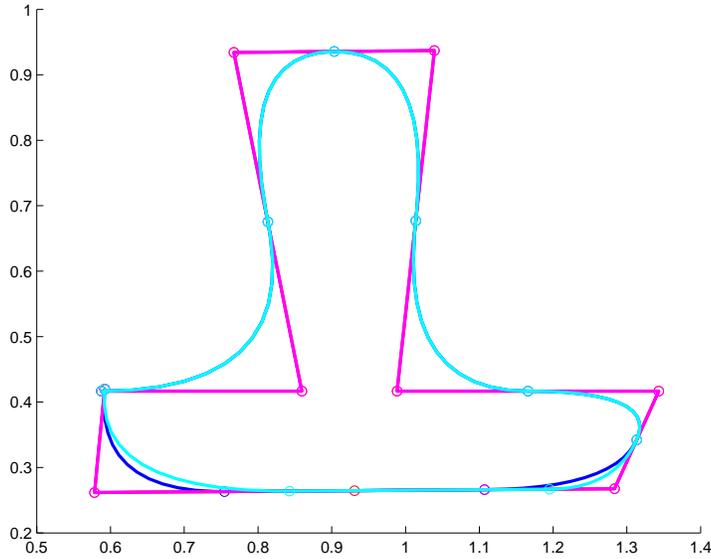
Observons dans cette partie quelle est l'influence de 3 points alignés dans le polygone de contrôle dans le cas où  $m=3$  et celui où  $m=4$ .

### 1.6.1 ordre : $m = 3$

On a choisi de placer le point  $P_2$  ( $k=3$ ) de la manière suivante (point sur le segment horizontal en bas) :

$$P_2 = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_3, \text{ avec } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

$P_2$  sera alors toujours entre  $P_1$  et  $P_3$  comme combinaison barycentrique de ces points.



Avec  $\alpha = \frac{1}{4}$ , on obtient la courbe cyan, et pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  la courbe bleue. Pour  $\alpha = \frac{1}{4}$ , le poids de  $P_3$  est plus importante que celui de  $P_1$ . Cela entraîne que la courbe cyan est plus proche de  $P_3$ ; elle est donc décalée sur la droite par rapport à la courbe bleue où les deux poids sont égaux.

Par ailleurs, on voit que les 2 courbes ont un segment AB en commun. On l'explique par l'expression de  $P(u)$  :

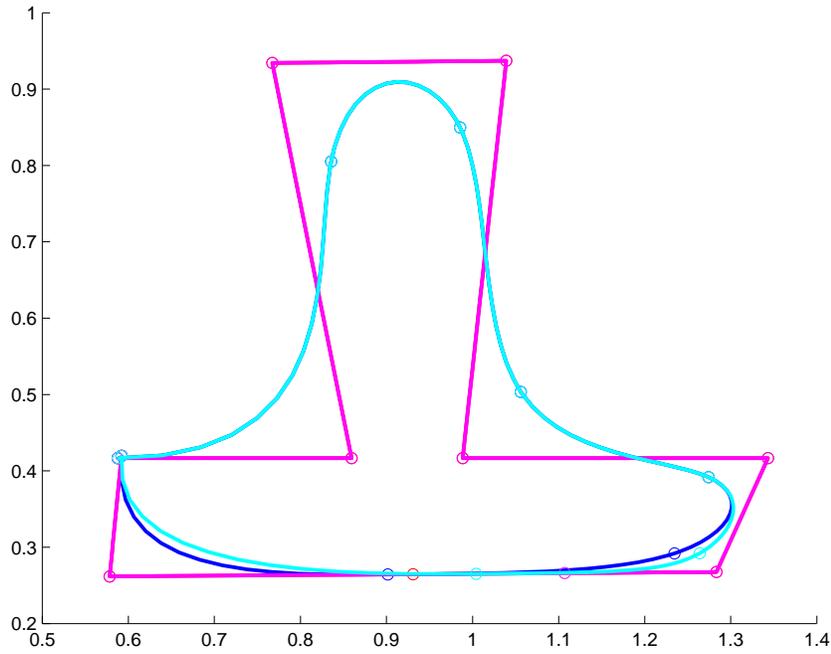
$$\begin{aligned}
 P(u) &= \sum_i P_i \cdot N_i^m(u) \\
 &= \dots + P_{k-2} \cdot N_{k-2}(u) + P_{k-1} \cdot N_{k-1}(u) + P_k \cdot N_k(u) + \dots \\
 &= \dots + P_{k-2} \cdot ((1 - \alpha) \cdot N_{k-1}(u) + N_{k-2}(u)) + P_k \cdot (\alpha N_{k-1}(u) + N_k(u)) + \dots
 \end{aligned}$$

Entre les points  $P_{k-2}$  et  $P_k$  la courbe sera confondue avec une partie du segment de contrôle.

### 1.6.2 ordre : $m = 4$

Pour un vecteur nodal d'ordre 4, la courbe est tangente en un point C au segment  $[P_1, P_3]$ .

Cas  $\alpha = \frac{1}{2}$  (ici en bleu) et  $\alpha = \frac{1}{4}$  (en cyan) :



Ceci s'explique car,

d'après la formule de dérivée d'une spline :

$$P'(u_4) = \sum_{i=0}^7 \frac{N_{i+1}^3(u_4)}{u_{i+4} - u_{i+1}} (P_{i+1} - P_i)$$

Mais le support des  $N_i^3$  contenant  $u_4$  est limité. Cela nous conduit à :

$$P'(u_4) = N_2^3(u_4) (P_2 - P_1) + N_3^3(u_4) (P_3 - P_2)$$

Donc si on prend en compte l'hypothèse suivante :  $P_2 = (1-\alpha) P_1 + \alpha P_3$ , on obtient :

$$P'(u_4) = (N_2^3(u_4)\alpha + N_3^3(u_4)(1-\alpha)) \overrightarrow{P_1 P_3}$$

De plus, avec la formule de partition de l'unité, on obtient pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  :

$$P'(u_4) = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1 P_3} = P_2$$

Et pour  $\alpha = \frac{1}{4}$  :

$$P'(u_4) = \left( N_2^3(u_4)\frac{1}{4} + N_3^3(u_4)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \right) \overrightarrow{P_1P_3}$$

En conclusion, on a bien montré pourquoi on remarquait que la courbe était tangente à son polygone de contrôle.

## 1.7 Multiplicité des points de contrôle

On choisit dans cette partie de doubler un point. La conséquence en est donc que, maintenant, le polygone de contrôle possède 3 points alignés. Ainsi, on retombe dans le même cas que la question précédente.

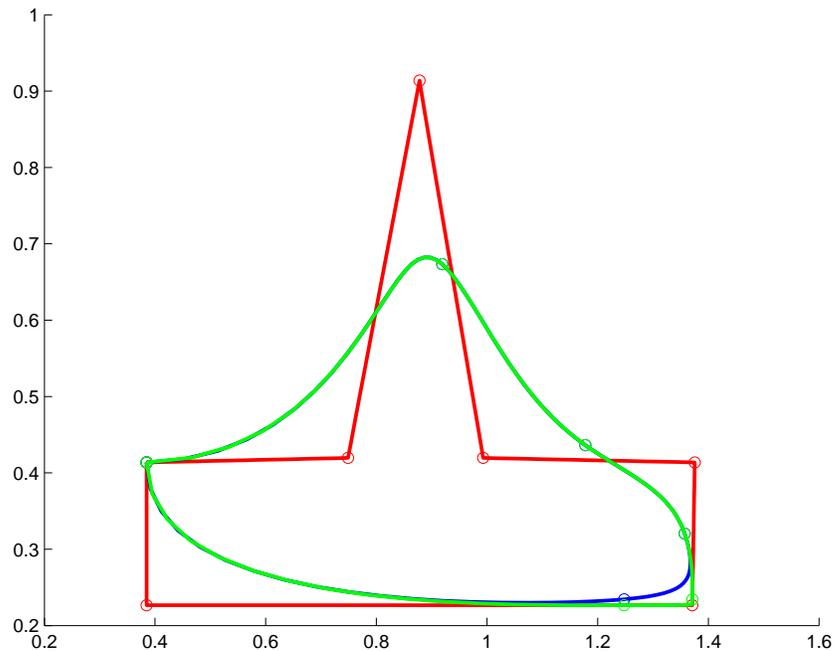
Nous constatons donc les mêmes choses : la courbe est tangente à son polygone de contrôle en un point.

Pour le cas d'un point triple, le même raisonnement nous conduit à considérer ce point triple comme 3 points alignés.

On en déduit de la question précédente, que la courbe est alors tangente à son polygone de contrôle en ce point exactement (cf figure).

Les vecteur nodaux sont les suivants :

- $[0, 0, 0, 0, 0 : 5, 5, 5, 5]$  (type II et  $m=5$ ) pour le point doublé.
- $[0, 0, 0, 0, 0 : 6, 6, 6, 6]$  (type II et  $m=5$ ) pour le point triplé.



## 2 Courbes fermées

### 2.1 Représentation d'un vecteur nodal standard

On cherche dans cette partie à tracer une courbe fermée. Pour cela, on peut s'aider des fonctions suivantes :

- "pervect" : qui permet une périodisation sur un point de polygone de contrôle (cette fonction peut aussi servir pour doubler ou tripler un point).
- "pltss" : qui permet de sélectionner un sous-intervalle du vecteur nodal avant le tracé de la spline.

Pour tracer une courbe fermée, il suffit d'introduire une périodicité dans la courbe (pour cela, on peut utiliser la fonction définie avant). En effet, par ce procédé, on répète les fonctions de base au début et en fin de vecteur nodal.

Autant de points dupliqués seront nécessaires pour obtenir la régularité de la courbe désirée (si on duplique 1 seul point on obtient la continuité, 2 points impliquent que l'arc sera C1 et ainsi de suite...).

Dans notre cas, on désire une spline d'ordre 4, par conséquent, on périodise

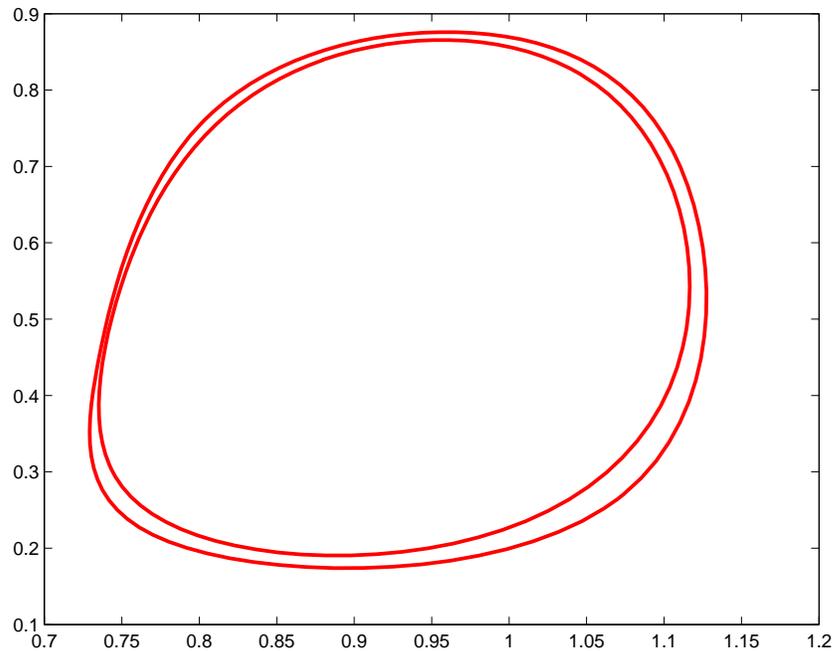
sur 5 points de contrôle.

$$\begin{cases} P(u_0) = P(u_8) \\ P'(u_0) = P'(u_8) \end{cases}$$

La dérivée s'exprimant par :

$$\begin{aligned} P'(u_{n+m}) &= \frac{m-1}{u_{n+m-1}-u_n} (P_n - P_{n-1}) \\ &= \frac{m-1}{u_{n+m} - u_n} (P_{n-1} \vec{P}_n) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une spline à vecteurs nodaux standards, il n'y a pas besoin de periodiser car il y a déjà une périodisation "naturelle" due au fait que les intervalles sont constants. On obtient alors (pour  $m=3$  puis  $m=4$ ) :



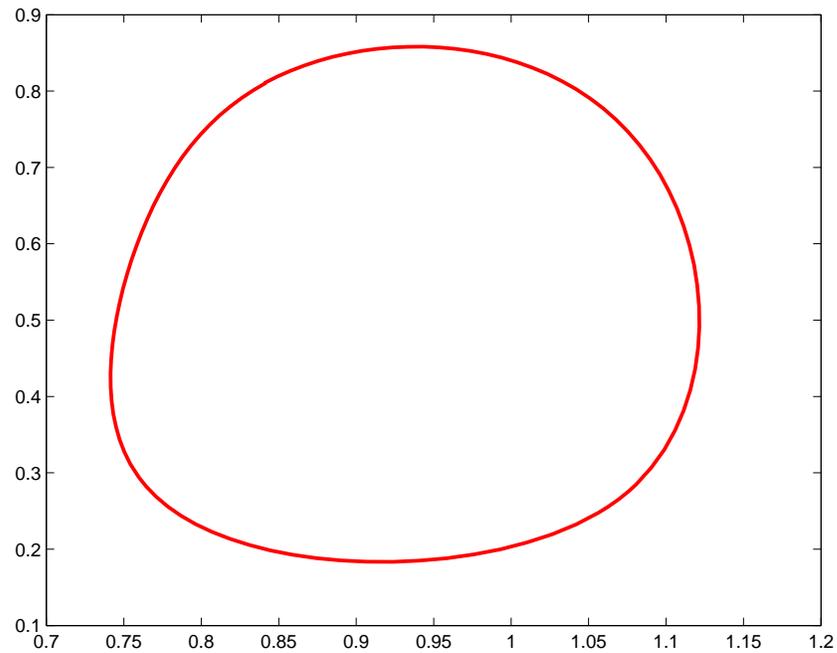
## 2.2 Représentation d'un vecteur nodal non standard

On choisit un vecteur nodal dont on périodise les intervalles afin que les continuités en  $P_0$  soient respectées :

[0 0.1 2.1 4.1 5 7 9 9.1 11.1 13.1 14 16 18 18.1 20.1 22.1]

(Un vecteur nodal non standard quelconque ne marchera pas)

Ceci donne :



### 3 Conclusion

Dans ce TP nous avons pu mettre en évidence l'influence des vecteurs nodaux et des points de contrôle sur les B-Splines, et nous avons pu étudier le comportement de B-Splines standards et non-standards, fermées et non-fermées, à différents ordres.