

Calcul de la SER d'un conducteur parfait recouvert d'une couche diélectrique en mode TE Sujet X

Nicolas Bonneel et Jean-Gabriel Prince

GMM5, 2005-2006



Table des matières

1	Introduction	3
2	Construction du modèle	4
2.1	Présentation du problème	4
2.2	Onde incidente, réfléchie, transmise et onde solution du problème	4
2.3	Détermination de T, R_1, R	4
2.4	Détermination d'un modèle "couche mince" équivalent	5
3	Implémentation MATLAB	7
4	Résultats	9
4.1	Tracé de la SER	9
4.2	Erreur relative	9
4.3	Ordre de l'erreur d'approximation	10
5	Conclusion	10
A	Code source Matlab	11

1 Introduction

On se propose au cours de cette étude de synthèse de calculer la Surface Equivalente Radar d'un conducteur parfait, recouvert d'une couche diélectrique, en mode TE. On a affaire ici à une géométrie 2D de type circulaire.

Afin de résoudre ce problème de diffraction, on va modéliser l'effet de la couche diélectrique par une condition aux limites d'impédance, en supposant que cette couche est mince.

Après avoir construit le modèle, on résoudra sous MATLAB par EFIE le problème aux conditions aux limites, en utilisant les fonctions prédéfinies de la librairie IE2M. Puis on étudiera l'évolution de l'erreur selon l'épaisseur de la couche. On terminera par confronter la solution exacte du problème à la solution approchée.

2 Construction du modèle

2.1 Présentation du problème

On a le problème de diffraction suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_1 + k^2 n^2 u_1 & = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \Delta u_0 + k^2 u_0 & = 0 \quad \text{dans } \Omega_0 \\ \varepsilon^{-1} \partial_{n_1} u_1 & = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{1}{2}} (\partial_{|x|} (u_0 - u^{inc})(x) - ik(u_0 - u^{inc})(x)) & = 0 \\ u_1 & = u_0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \varepsilon^{-1} \partial_{n_1} u_1 + \partial_{n_0} u_0 & = 0 \quad \text{sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Avec :

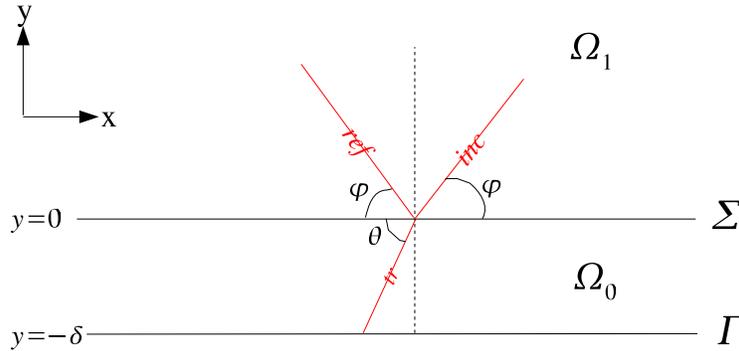
$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\} \\ \Omega_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -\delta < y < 0\} \\ \Sigma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\} \\ \Gamma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -\delta\} \end{aligned}$$

2.2 Onde incidente, réfléchie, transmise et onde solution du problème

En prenant comme onde incidente l'onde plane $u^{inc}(x, y) = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)}$, on a la solution qui est donnée par une superposition d'ondes planes dans Ω_1 et Ω_0 .

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= T(e^{-ikn y \sin \theta} + R_1 e^{ikn y \sin \theta}) e^{-ikn x \cos \theta} \quad \text{dans } \Omega_1 \\ u_0(x, y) &= (e^{-iky \sin \varphi} + R e^{iky \sin \varphi}) e^{-ikx \cos \varphi} \quad \text{dans } \Omega_0 \end{aligned}$$

On a les trajets ondulatoires suivants :



De plus on peut montrer que θ est déterminé par la loi de Snell-Descartes :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \Rightarrow T(1 + R_1) e^{-ikn x \cos \theta} &= (1 + R) e^{-ikx \cos \varphi} \quad \forall x \\ \Rightarrow n \cos \theta &= \cos \varphi \end{aligned}$$

2.3 Détermination de T, R_1, R

On rappelle que $\partial_{\vec{n}_i} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_i$, donc $\partial_{n_1} = -\partial_{n_0}$ puisque les normales sortantes des milieux sont opposées l'une de l'autre.

On pose les conditions aux limites :

– condition de conducteur parfait

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_{n_1}u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma &\Leftrightarrow \partial_y u_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -e^{-ikn\delta\sin\theta} + R_1 e^{ikn\delta\sin\theta} = 0 \\ &\Leftrightarrow R_1 = e^{2ih(\delta)}\end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned}h(\delta) &= k\delta n\sin\theta \\ f(\varphi) &= \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{n^2}}\end{aligned}$$

– condition de continuité de la composante tangentielle du champ magnétique

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\partial_{n_1}u_1 + \partial_{n_0}u_0 = 0 \text{ sur } \Sigma &\Leftrightarrow \varepsilon^{-1}\partial_y u_1 = \partial_y u_0 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon^{-1}T(-n\sin\theta + R_1 n\sin\theta) = -\sin\varphi + R\sin\varphi \\ &\Leftrightarrow \frac{1-R}{1+R} = \frac{\varepsilon^{-1}nf(\varphi)}{\sin\varphi} \frac{1-R_1}{1+R_1} \\ &= g(\varphi) \frac{1-R_1}{1+R_1}\end{aligned}$$

en posant :

$$g(\varphi) = \frac{\varepsilon^{-1}nf(\varphi)}{\sin\varphi}$$

On pose alors l'impédance :

$$Z = \frac{1-R}{1+R}$$

Or on a :

$$\frac{1-R_1}{1+R_1} = \frac{1-e^{2ih(\delta)}}{1+e^{2ih(\delta)}} = \frac{-i\sin(h(\delta))}{\cos(h(\delta))} = -itan(h(\delta))$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}R_1 &= e^{2ih(\delta)} \\ Z &= -ig(\varphi)tan(h(\delta)) \\ R &= \frac{1-Z}{1+Z} \text{ par involutivité} \\ T &= \frac{1+R}{1+R_1}\end{aligned}$$

2.4 Détermination d'un modèle "couche mince" équivalent

On cherche à déterminer les coefficients a_0 et b_0 tels que le modèle puisse être considéré comme un modèle de couche mince d'un dielectrique sur une sphère, respectant comme condition aux limites :

$$\partial_y u_0 + a_0 \partial_s^2 u_0 + b_0 u_0 = 0$$

pour tout champs TE incident :

$$u_0 = e^{-ik(x\cos\varphi+y\sin\varphi)} + R_{app}e^{-ik(x\cos\varphi-y\sin\varphi)}$$

avec R_{app} le nouveau coefficient de reflexion du système.

Pour cela, nous identifions l'impédance approchée issue de cette équation avec le développement limité à l'ordre 3 de l'impédance Z que nous avons calculé précédemment grâce à un modèle exact de couche épaisse.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= x + \mathcal{O}(x^3) \\ \Rightarrow Z &= -ig(\varphi)\tan(h(\delta)) = -\frac{nf(\varphi)}{\sin\varphi} \cdot i(k\delta n f(\varphi)) + \mathcal{O}(\delta^3) \end{aligned}$$

Or $f(\varphi) = \sin(\theta)$ d'où $n^2 f(\varphi)^2 = n^2(1 - \cos^2\theta) = n^2 - \cos^2\varphi$.

Nous obtenons donc une impédance approchée à l'ordre 3 par :

$$Z = \frac{(n^2 - \cos^2\varphi)k\delta}{i\varepsilon\sin\varphi}$$

D'autre part, nous avons, en $y = 0$:

$$\partial_y u_0 + a_0 \partial_s^2 u_0 + b_0 u_0 = -ik\sin\varphi(1 - R_{app}) + a_0(-ik\cos\varphi)^2(1 + R_{app}) + b_0(1 + R_{app})$$

D'où :

$$\frac{1 - R_{app}}{1 + R_{app}} = \frac{b_0 - a_0 k^2 \cos^2\varphi}{ik\sin\varphi} = Z_{app}$$

Nous pouvons donc identifier notre impédance approchée avec le développement limité précédent :

$$Z_{app} \approx Z$$

donc :

$$\frac{b_0 - a_0 k^2 \cos^2\varphi}{ik\sin\varphi} \approx \frac{(n^2 - \cos^2\varphi)k\delta}{i\varepsilon\sin\varphi}$$

d'où :

$$\frac{b_0}{k} - a_0 k \cos^2\varphi = \frac{n^2 k \delta}{\varepsilon} - \cos^2\varphi \frac{k \delta}{\varepsilon}$$

Cette relation étant valable pour tout φ , nous pouvons donc identifier les termes constants et les termes en $\cos^2\varphi$ et obtenons :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\delta}{\varepsilon} \\ b_0 &= \frac{k^2 n^2 \delta}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Pour le modèle sphérique, nous considérerons le même modèle que celui de la couche plane, en considérant $\partial_y \rightarrow \partial_{\mathbf{n}}$ et $\partial_x^2 \rightarrow \partial_s^2$:

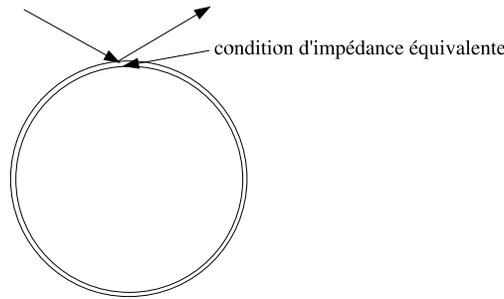


FIG. 1 – Modèle sphérique

3 Implémentation MATLAB

On a les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R = 1 + \delta & \text{rayon extérieur du cercle} \\ N_s = 50 & \text{nombre de points dans la discrétisation du cercle} \\ k = 2 & \text{nombre d'onde} \\ \varepsilon = 2.5 & \text{permittivité diélectrique} \\ \mu = 1 & \text{perméabilité magnétique} \\ n = \sqrt{\mu\varepsilon} & \text{indice du diélectrique} \\ \theta_{incident} = 0 & \text{angle d'incidence du rayon} \end{array} \right.$$

Ainsi que les valeurs de a_0 et b_0 telles qu'elles ont été définies précédemment.

On utilise la formule :

$$\frac{1}{2}Mp - N^T p + D\lambda = -\partial_n u^{inc} \text{ sur } \Gamma$$

issue de la formulation variationnelle de la condition de Neumann :

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} pp' d\Gamma - \int_{\Gamma} Np'p d\Gamma = - \int_{\Gamma} \partial_{\bar{n}} u^{inc} p' d\Gamma$$

avec M la matrice masse, N potentiel de double couche et D sa dérivée normale.

De plus, on utilise la relation :

$$Mp - P\lambda = 0$$

issue de la formulation variationnelle de notre nouvelle condition à la limite :

$$\partial_{\mathbf{n}} u_0 + Pu_0 = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} P &= \partial_s a_0 \partial_s + b_0 \\ p &= \partial_n u|_{\Gamma} \lambda = u|_{\Gamma} \end{aligned}$$

On en déduit alors λ pour chaque point de Γ (discrétisé par la fonction `circle`) par la relation :

$$\left(\frac{1}{2}P - N^T M^{-1}P + D\right)\lambda = -\partial_n u^{inc}$$

On peut dès lors en déduire p par la relation :

$$P\lambda = Mp$$

Nous pouvons alors calculer la fonction caractéristique de radiation donnée par :

$$\begin{aligned} a_0(\theta) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2i}{\pi k}} \left(\int_{\Gamma} e^{-ik(y_1 \cos\theta + y_2 \sin\theta)} p(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} ik(n_1 \cos\theta + n_2 \sin\theta) e^{-ik(y_1 \cos\theta + y_2 \sin\theta)} \lambda(y) d\Gamma \right) \\ &= a_p(\theta) + a_{\lambda}(\theta) \end{aligned}$$

Les termes $a_p(\theta)$ et $a_{\lambda}(\theta)$ sont calculés par les fonctions `farsngl1` et `fardbl1`.

Puis on obtient $\sigma(\theta) = 2\pi|a(\theta)|^2$, et $s(\theta) = 10\log_{10}(\sigma(\theta))$ qui est l'expression de la SER recherchée.

On définit l'erreur pour la norme L^2 entre la solution théorique s_{theo} calculée par la fonction `rcscoat(k,R,epsilon,mu,theta)`, et la solution approchée s_{app} :

$$erreur = \frac{\|s_{theo} - s_{app}\|_2}{\|s_{theo}\|_2} = \sqrt{\frac{\sum_i (s_{theo}(\theta_i) - s_{app}(\theta_i))^2}{\sum_i (s_{theo}(\theta_i))^2}}$$

avec $\theta_i \in [0, 2\pi]$

4 Résultats

4.1 Tracé de la SER

Nous traçons la SER exacte et la SER approchée par notre méthode “couche mince” en coordonnées polaires : $r = s(\theta)$, et nous obtenons pour $\delta = 0.1$ et $\delta = 0.5$ les résultats suivants :

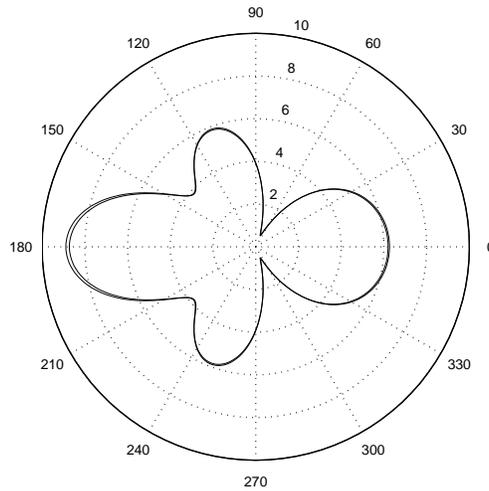


FIG. 2 – SER exacte et approchée, $\delta = 0.1$

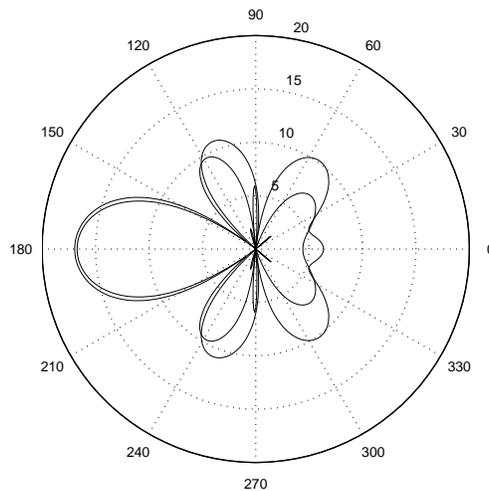


FIG. 3 – SER exacte et approchée, $\delta = 0.5$

Nous voyons que notre modèle est acceptable pour un δ de 0.1 (erreur relative de 1.38%) mais semble inapproprié pour la modélisation d’une couche épaisse de $\delta = 0.5$ (erreur relative de 45.75 %, cf plus bas).

4.2 Erreur relative

Nous traçons l’erreur relative entre la solution exacte et la solution approchée :

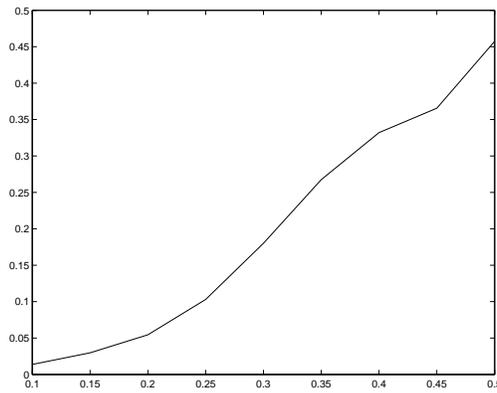


FIG. 4 – Graphe d’erreur

Nous obtenons une erreur relative de 1.38% pour un δ de 0.1, jusqu’à une erreur de 45.75% pour un δ de 0.5. Nous obtenons exactement les mêmes courbes que les binômes resolvant une CFIE (sujet 10) et effectuant une décomposition de domaines (sujet 11) : nous pouvons donc en conclure que l’erreur entre la solution exacte et la solution approchée provient exclusivement de l’approximation “couche mince” commune à ces sujets.

4.3 Ordre de l’erreur d’approximation

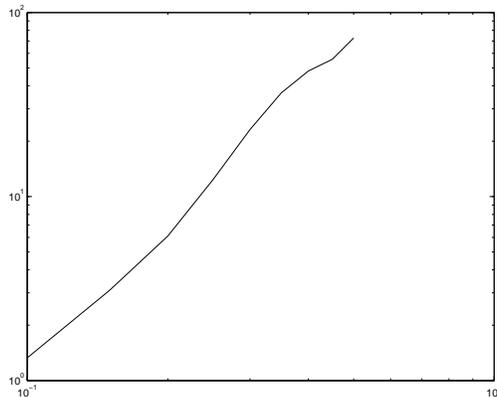


FIG. 5 – Tracé log-log de l’erreur absolue

On obtient après régression logarithmique un coefficient de 2.6073. On a donc bien une erreur en δ^3 , sachant que l’on a effectué la régression jusqu’à $\delta = 0,5$, ce qui n’est plus considéré comme un δ “petit”.

5 Conclusion

La méthode basée sur l’approximation “couche mince” nous permet d’obtenir de bons résultats pour une épaisseur de couche assez petite ($\delta = 0,1$), avec une erreur relative d’approximation faible (1,38%). On a néanmoins vu que les méthodes CFIE et de décomposition de domaines donnent les memes résultats en terme d’erreur d’approximation, ce qui montre dans notre cas qu’une méthode de type EFIE suffit à obtenir une bonne approximation de la solution.

A Code source Matlab

```
clear all;

% données physiques
Ns      = 50;           % nb de pts de discretisation du cercle
k       = 2.;          % nombre d'onde
epsilon = 2.5;         % permittivité
mu      = 1.;          % permeabilité
n       = sqrt(mu*epsilon); % indice de la couche
theta_inc = 0.;        % angle d'incidence

i=1;

IDelta = 0.1:0.05:0.5;

for delta=IDelta

    R      = 1+delta;      % rayon de la sphère

    % coefficients du modèle
    a0     = delta/epsilon;
    b0     = delta*k^2*n^2/epsilon;

    % maillages du cercle et discretisation des angles
    cercle = circle(Ns,R);
    theta  = (pi/180.)*[0:360];

    % calcul de la SER théorique exacte
    s_theo = rcscoat(k,R,epsilon,mu,theta);

    % dérivée normale du champ incident
    dnUinc = dnpl1(theta_inc,Ns,cercle,k);

    % matrices trace normale double couche, contribution double
    % couche, resolution de la condition aux limites et masse
    D      = dndble(Ns,cercle,Ns,cercle,k);
    N      = dble1(Ns,cercle,Ns,cercle,k);
    P      = edpcurve(a0,-b0,cercle);
    M      = mass1(Ns, cercle);
    invM   = inv(M);
```

```

% resolution de  $0.5 P \cdot \lambda - N' \cdot M^{-1} \cdot P \cdot \lambda + D \cdot \lambda = -dnUinc$ 
lambda = -(0.5*P - transpose(N)*invM*P + D)\dnUinc;
% resolution de  $M \cdot p - P \cdot \lambda = 0$ 
p      = invM*(P*lambda);

% calcul des conditions de radiation
ap     = farsngl1(theta,p,Ns,cercle,k);
alambda = fardble1(theta,lambda,Ns,cercle,k);

% calcul de la fonction caracteristique de radiation et de la SER
a_theta = ap + alambda;
sigma   = 2*pi*abs(a_theta).^2;
s       = 10*log10(sigma);

% calcul d'erreur en norme L_2
erreur(i)=sqrt(sum((s_theo-s').^2)./sum(s_theo.^2));
erreurabs(i) = sqrt(sum(abs(s_theo-s')));

i = i+1;

end

% tracé de l'erreur
plot(IDelta, erreur);

%...ou tracé des SER exactes et calculées (pour UN delta)
%polar(theta,s_theo,'-g');
%hold on;
%polar(theta',s);
%hold off;

```