

# Rapport de stage

Bonneel Nicolas

Juillet 2004

## **Résumé**

Simulation du refroidissement du manteau de Io en tenant compte de son volcanisme, à l' Observatoire Midi-Pyrénées au laboratoire de "Dynamique Terrestre et Planétaire"

## Table des matières

# 1 Présentation du stage

Ce stage a duré 1 mois (du 1<sup>er</sup> au 31 Juillet), sous la direction de Marc Monnereau à l'Observatoire de Midi-Pyrénées, Unité Mixte de Recherche 5562 de l'université Paul Sabatier et du CNRS, dans le laboratoire de "Dynamique Terrestre et Planétaire". Je remercie particulièrement Marc Monnereau pour le temps passé quotidiennement à m'expliquer tant les principes de résolutions que les mécanismes physiques mis en jeu.

## 2 But du stage

### 2.1 Présentation

De récentes observations de Io, satellite de Jupiter, ont montré un volcanisme intense pouvant expliquer sa faible température. En effet, Io étant très proche de la géante Jupiter, elle subit d'énormes déformations au cours du temps : l'effet de marée, qui devrait la rendre extrêmement chaude. Le but du stage est d'évaluer l'efficacité de l'évacuation de la chaleur par le volcanisme de Io (ou tout autre planète tellurique) en intégrant dans un code de convection les effets du volcanisme.

### 2.2 Travail à effectuer

Un code Fortran de convection résolvant l'équation de la chaleur (pour une divergence du champs de vitesse nulle) et l'équation de Navier-Stokes pour la convection (à viscosité constante et pour une divergence du champs de vitesse nulle aussi) en cartésien 2D a été fourni.

Le but était de modifier ce code pour y inclure une viscosité qui dépende de la profondeur puis de la température, d'ajouter le calcul d'un terme puit résultant de la fusion de la roche en magma qui est acheminé vers la surface (cet acheminement étant rapide, on considère qu'on supprime simplement le magma trop chaud, et qu'on laisse rentrer de la matière froide en surface), puis de faire varier la source de chaleur avec le temps.

Nous ne ferons varier la source de chaleur que pour la simulation du manteau terrestre puisque la source principale de chaleur sont les éléments radiogéniques du manteau terrestre donc on prend en

compte la décroissance radioactive, ce qui n'est pas le cas pour Io qui ne contient à priori pas d'éléments radiogéniques, mais dont la source de chaleur provient de l'effet de marée supposé constant dans le temps.

L'apparition d'un terme puit implique une non conservation de la masse, donc le champ de vitesse n'est plus à divergence nulle, ce qui modifie quelque peu les équations à résoudre.

La modification du même code mais pour un système de coordonnées 3D sphérique devait être modifié de la même façon une fois les mécanismes du cartésien 2D compris et résolus, mais je n'ai pas eu le temps de me pencher sur ce problème en 1 mois de stage.

### 3 Déroulement du stage

#### 3.1 Intégration de la viscosité non constante

Après s'être familiarisé avec le code fourni, la première modification à apporter au code a été la gestion de la viscosité non constante de la roche. Dans un premier temps, on s'intéressera à faire dépendre la viscosité de la roche avec la profondeur (plus on est proche du noyau, moins la roche est visqueuse), puis avec la température (plus il fait chaud, moins la roche est visqueuse).

##### 3.1.1 Modification de l'équation de Navier-Stokes

On suppose maintenant la viscosité  $\eta$  fonction de la profondeur  $z$ .

On revient à l'expression de l'équation de Navier-Stokes :

$$\vec{\nabla} \cdot \tau - \vec{\nabla} p = Ra.T \cdot \frac{\vec{g}}{g}$$

où  $\tau$  désigne le tenseur des contraintes,  $p$  le champ de pression,  $Ra$  la constante de Rayleigh,  $T$  le champ de température et  $g$  la constante de gravité.

Lorsque la viscosité était constante, des simplifications avaient pu amener au calcul de  $\vec{\nabla} \cdot \tau$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \tau = \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

Nous ne pourrons pas utiliser cette expression, et nous calculerons donc (notation d'Einstein) :

$$\vec{\nabla} \cdot \tau = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\eta(z) (\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial v^k}{\partial x^k}))$$

On en déduit de l'égalité vectorielle, le système :

$$\frac{\partial}{\partial x} 2\eta(z) \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \eta(z) (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} \eta(z) (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} 2\eta(z) \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \eta(z) (\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(z) (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) - \frac{\partial p}{\partial z} = -Ra.T$$

Après simplification, dérivation de la première égalité par rapport à  $z$ , dérivation de la seconde égalité par rapport à  $x$ , et soustraction de ces deux égalités, on obtient une nouvelle égalité où la pression n'apparaît plus :

$$2 \frac{\partial}{\partial z} \eta \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \eta (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta (\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}) = Ra.T \quad (1)$$

avec  $\eta = \eta(z)$

### 3.1.2 Résolution de l'équation

Le code fourni considère la divergence du champ de vitesse nulle, ce qui implique que le champ de vitesse est le rotationnel d'un champ  $\psi \cdot \vec{e}_y$ . Puisque nous traiterons le volcanisme, la masse n'est plus conservée, donc la divergence du champ de vitesse sera non nulle. Nous écrirons donc le champ de vitesse :

$$\vec{v} = \text{rot}(\psi \cdot \vec{e}_y) + \vec{\nabla} A$$

$\psi$  est appelé le poloidal, et  $A$  est tel que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Delta A = \text{terme source}$   
En 2D, nous avons donc :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial z}$$

En remplaçant  $v_x$  et  $v_z$  par leur expression dans (1), on obtient :

$$\eta \Delta^2 \psi + 2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\Delta \psi) - \frac{\partial}{\partial x} (\Delta A) \right] - \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z} \right] = Ra.T \quad (2)$$

Nous considererons ensuite que le champs de température T est symétrique en x, ce qui implique qu'il peut s'écrire en une série de cosinus uniquement. Il s'ensuit que :

$$T = \sum_k T_k(z).cos(kx)$$

$$\psi = \sum_k \psi_k(z).sin(kx)$$

$$A = \sum_k A_k(z).cos(kx)$$

avec  $kx = \pi \cdot \frac{k.x}{L}$  et L la largeur du domaine rectangulaire.

En utilisant ces expressions dans (2), et en posant  $k = \pi \cdot \frac{k}{L}$ , on obtient les k équations différentielles :

$$\eta \left[ k^4 \psi_k - 2.k^2 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi_k}{\partial z^4} \right] - 2. \frac{\partial \eta}{\partial z} \left[ k^2 \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - \frac{\partial^3 \psi_k}{\partial z^3} + k^3 .A_k - k. \frac{\partial^2 A_k}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \left[ k^2 \psi_k + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z^2} + 2.k \frac{\partial A_k}{\partial z} \right] = k.Ra.T_k$$

On peut ainsi discrétiser cette équation au second ordre pour obtenir un systeme pentadiagonal, la résoudre par les éléments finis pour chaque k, et appliquer une transformée en sinus pour retrouver  $\psi$ . Le code de résolution étant déjà écrit, seuls certains termes de l'équation ont dû être modifiés ou ajoutés.

A est obtenu en résolvant  $\Delta A = \text{terme source}$ . Ce terme source sera dans un premier temps imposé nul (il s'agit de la fraction de magma enlevé ou ajouté en un pas de temps au point (x,z)). Le calcul de A se fera en décomposant la source en série de cosinus. On obtient alors :

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial z^2} - k^2 .A_k = \text{source}_k$$

formant un système tridiagonal que l'on peut résoudre. On fera attention lors de ces résolutions aux grilles décalées : Les points de calcul de  $A$  et  $\psi$ , et les points de calcul de  $T$  et du terme source sont décalés d'un demi pas de grille en  $x$  et en  $z$ , permettant le calcul des vitesses entre chacun de ces points ! Ainsi, lorsque dans une équation il y a un terme en  $\psi$  et un terme en  $T$ , il faudra les ramener au même point auparavant.

### 3.1.3 Conditions aux limites

Nous devons trouver des conditions aux limites pour  $\psi$  et pour  $A$ .

Si la source est nulle, le terme  $A$  sera nul, et nous devons retrouver une simulation avec un  $\psi$  imperméable à la surface et à la base ( $v_z = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ ). De plus, on autorise la matière froide à rentrer en surface : donc  $A$  doit être perméable en surface (note : si  $\psi$  et  $A$  étaient tous deux perméables en surface, les équations pour résoudre  $\psi$  et  $A$  seraient couplées par cette condition).

Par ailleurs, on ajoutera pour  $\psi$  une condition de NoSlip en surface ( $v_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$ ) et de FreeSlip à la base (pas de contrainte verticale  $\Leftrightarrow \tau \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ ).

### 3.1.4 Expression de la viscosité en fonction de la profondeur

Nous avons  $\eta = \eta(z)$ . Une forme de  $\eta(z)$  telle que la viscosité était très forte en surface, et très faible près du noyau a été trouvée :  $\eta(z) = 1 - 0.5(1 + \tanh \frac{z}{2})$ . Nous avons donc pu tester cette forme de viscosité.

### 3.1.5 Expression de la viscosité en fonction de la température

Une expression plus correcte de la viscosité est donnée en fonction de la température : plus la température est élevée, plus la viscosité est faible. Nous avons ainsi trouvé une forme de viscosité dépendant de la température moyenne sur une ligne horizontale du domaine (on n'a fait dépendre  $\eta$  que de  $z$ ) :  $\eta(z) = \alpha \exp \frac{\beta}{T(z)}$ .

## 3.2 Intégration du terme source

### 3.2.1 Modification de l'équation de la chaleur

Nous avons vu comment l'expression de la vitesse était modifiée par le fait que sa divergence ne soit plus nulle. De même des termes sont à modifier dans la résolution de l'équation de la chaleur fournie pour prendre en compte cette divergence.

– Première méthode

Soit  $\Gamma$  la fraction de magma à supprimer à un instant donné. Nous avons  $\frac{D\Gamma}{Dt} = \text{terme source}$ , avec  $\frac{D}{Dt}$  la dérivée Lagrangienne.

L'expression de l'équation de la chaleur donnée était :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \Delta T + R$$

où  $T$  est la température,  $v$  la vitesse,  $R$  une source de chaleur constante dans l'espace (éléments radiogéniques pour la Terre ou chaleur provoquée par l'effet de marée pour Io),  $C_p$  la capacité calorifique et  $\rho$  la densité.

Elle doit donc être modifiée pour prendre en compte le terme source :

$$\rho C_p \frac{DT}{dt} + Ql \frac{D\Gamma}{dt} - \rho C_p T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Delta T + R$$

avec  $Ql$  la chaleur latente de fusion ou cristallisation.

En développant les dérivées Lagrangiennes et en simplifiant, on obtient :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T \right) \left( 1 + \frac{Ql}{\rho C_p} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right) + v_z \cdot \frac{Ql}{\rho C_p} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - T \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{\rho C_p} (\Delta T + R)$$

Cette équation est résolue en utilisant une méthode à pas fractionnaire pour résoudre suivant  $z$  à  $x$  constant pendant un demi pas de temps, puis suivant  $x$  à  $z$  constant pendant le demi pas de temps suivant. On résout dans chaque direction avec les éléments finis au second ordre en utilisant un schéma upwind pour calculer les vitesses. Cette équation, bien que donnant des résultats très précis n'est pas satisfaisante puisque nous souhaitons que le magma une fois fondu ne puisse pas recristalliser. Par conséquent il ne devrait pas y avoir de cristallisation de magma, ce que ne permet pas cette équation.

– Deuxième méthode

Finallement c'est une deuxième méthode qui a été adoptée : on résoud l'équation de la chaleur en prenant en compte la divergence non nulle uniquement (et non les chaleurs latentes) et on obtient une température dite potentielle, puis dans un deuxième temps on ajuste la température en fonction des quantités de magma fondu. L'équation à résoudre est :

$$\rho C_p \frac{DT}{dt} - \rho C_p T \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \Delta T + R$$

Cette résolution étant faite de la même manière que pour la première méthode par pas fractionnaire, on évalue la température réelle itérativement par dichotomie en supprimant une fraction de magma et en réévaluant la température, jusqu'à convergence de la température (en moins d'une dizaine d'itérations en général). On évalue ainsi :

- $F = \Gamma(z, T)$  : la fraction de magma à enlever
- $Ql = \gamma(z) \cdot T_{equilibre} \cdot \frac{d\rho}{\rho}$  : la chaleur latente, avec  $\gamma(z)$  la pente de Clapeyron
- $T_{potentielle} = T_{equilibre} + \frac{Ql \cdot F}{\rho \cdot C_p}$

On obtient ainsi la température finale ( $T_{equilibre}$ ) ainsi que la fraction de magma à enlever sur un intervalle de temps  $dt$  (non constant : les périodes de forte convection auront un  $dt$  plus petit que les périodes plus stables).

Dans les deux cas, on maintient une température en surface froide et constante, et on maintient une température à la CMB (Core Mantle Boundary : interface entre le noyau et le manteau) chaude et décroissante puisque le noyau se refroidit au cours du temps (ou croissante s'il se rechauffe) :

$$\frac{M_N \cdot C_p}{Surface\ du\ noyau} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = flux_{CMB}$$

d'où :

$$T_{CMB} = T_{CMB} + dt \cdot \frac{\kappa \cdot Surface\ du\ noyau}{C_{p_{Fe}} \cdot M_N} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{CMB}$$

avec  $Cp_{Fe}$  la capacité calorifique du Fer (composante principale du noyau),  $\kappa$  la conductivité thermique,  $M_N$  la masse du noyau et  $T_{CMB}$  la température à la CMB.

### 3.2.2 Calcul du terme source

Pour calculer le terme source, on fait appel dans les deux cas à  $\Gamma$ .  $\Gamma$  est calculé par un diagramme de Clapeyron que j'ai stocké (2 courbes de 3 polynômes par morceaux du second et troisième degré) fonction de la température et de la pression. Il apparait une courbe du solidus et une courbe du liquidus : lorsqu'une particule dépasse la courbe du solidus, celle-ci commence à fondre jusqu'à être à l'état liquide au niveau de la courbe du liquidus.

$\Gamma$  est donc simplement une interpolation linéaire entre la courbe du solidus et du liquidus d'une fraction entre 0 et 1 : au solidus on ne fond rien ( $\Gamma = 0$ ) et au liquidus on fond la totalité de la particule ( $\Gamma = 1$ ).  $\Gamma$  est donc une fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$ , mais nous connaissons la relation  $P = \rho.g.z$  permettant de se passer du calcul de la pression.

$\gamma$  a simplement été pris comme la moyenne des pentes des courbes du solidus et du liquidus (dans un diagramme de Clapeyron classique, le liquidus et le solidus sont des droites donc  $\gamma$  est la pente de Clapeyron et est constant, ce qui n'est pas le cas ici).

### 3.3 Source de chaleur non constante

Pour la simulation de la Terre, nous avons besoin de prendre en compte la décroissance radioactive des éléments radiogéniques présents dans le manteau (il n'y en a pas dans le noyau). Pour cela, connaissant les demi-vies des  $^{238}U$ ,  $^{235}U$ ,  $^{232}Th$  et  $^{40}K$  présents dans le manteau, ainsi que leur proportions, et ayant calculé la radioactivité à la création de la Terre il y a 4.5 milliards d'années, on calcule le terme de radioactivité au temps  $t$  :

$$R = R_0 \cdot \sum_{i=1..4} \alpha_i \cdot \exp(-\lambda_i \cdot t)$$

## 4 Résultats

Les calculs ont été effectués sur un IBM Regatta 16 processeurs du CNES (machine scalaire), mais le code n'exploitait pas la parallélisation des calculs. Le temps de calcul s'étend d'une minute en moyenne pour quelques millions d'années d'évolution de la Terre ou de Io, à quelques heures pour quelques milliards d'années. Les résolutions n'ont été faites que pour des grilles de 128x128 points, à pas de temps variable. Ces résultats mettent en évidence l'efficacité du refroidissement par le volcanisme pour Io comparé au rayonnement seul, et l'impossibilité pour la Terre d'avoir été entièrement solide ou liquide à sa création il y a 4.5 milliards d'années.

On trace l'évolution du champs de température (5 bitmaps au cours du temps), l'évolution de la viscosité (1 bitmap), l'évolution de la température du noyau et de la surface (2 courbes), et l'évolution des flux de chaleurs : flux à la surface (bleu), au noyau (rouge), la radioactivité (vert),  $T \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  (noir),  $\frac{\partial T}{\partial t}$  (cyan) et Ql (magenta) (les 5 dernières courbes).

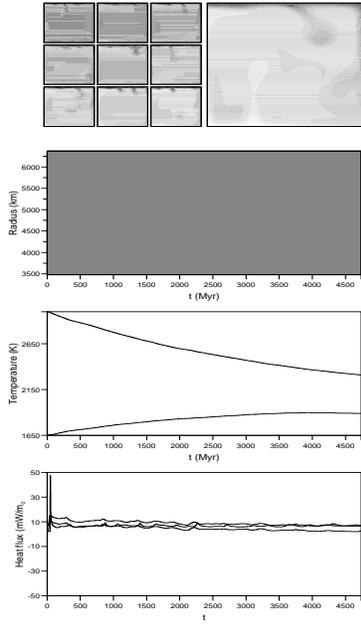


FIG. 1 – Io - Viscosité constante

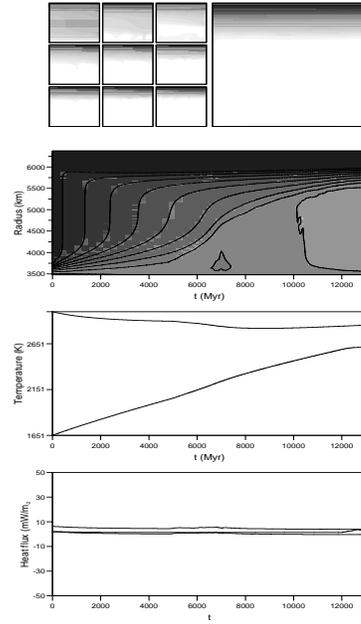


FIG. 2 – Io - Viscosité variable

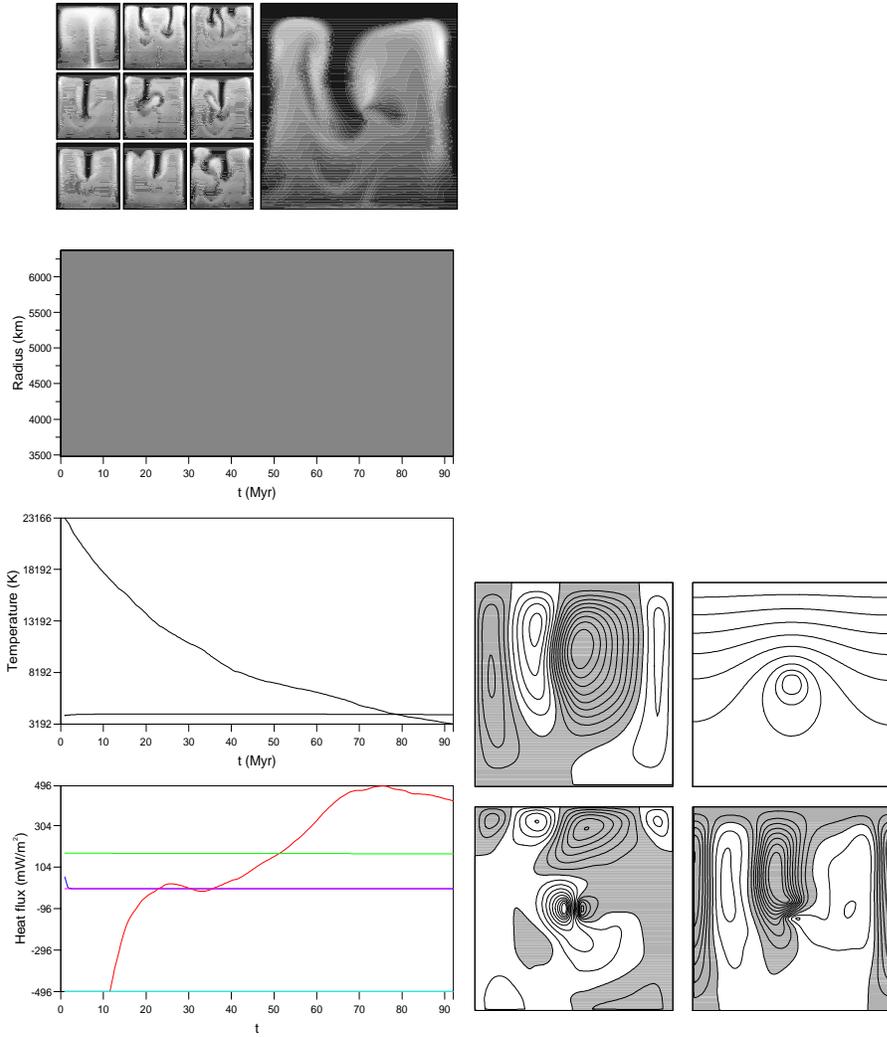


FIG. 3 – Io - Temperature avec un terme puit central unique

FIG. 4 – Io - Vitesse induite

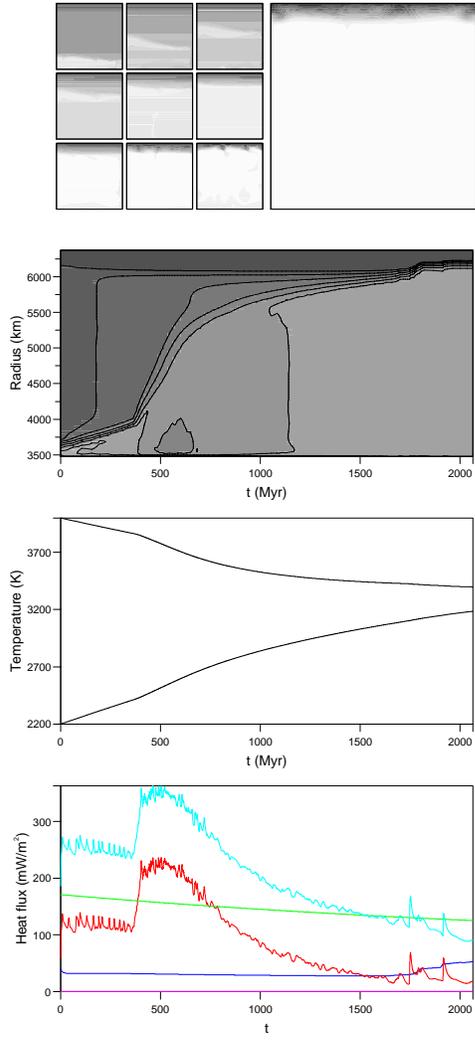


FIG. 5 – Terre - Temperature sans fusion de magma

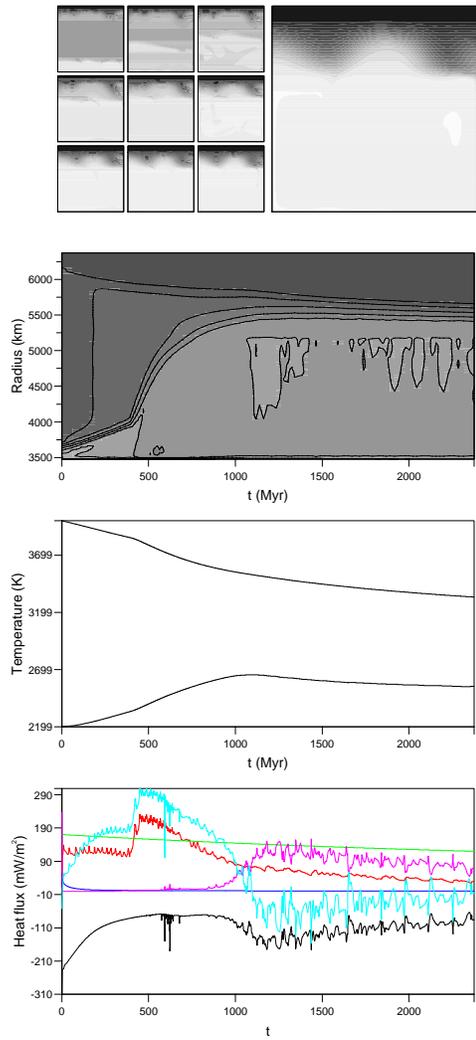


FIG. 6 – Terre - Temperature avec fusion